ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ:

Ορισμός: Έστω $(a_k)_{k=0}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ λέγεται δυναμοσειρά με συντελεστές (a_k). (Το $x \in \mathbb{R}$ είναι παράμετρος.)

Ερώτημα: Με δεδομένους τους συντελεστές (a_k), για ποιά x συγκλίνει η σειρά;

Ορισμός: Όταν η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει (για κάποιο συγκεκριμένο x) θα λέμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x.

Πρόταση: Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές (a_k).

α) Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x $(x \neq 0)$ και $|y|<|x|$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο y.

β) Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο y και $|x|>|y|$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Απόδειξη:

α) Εφόσον η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει, συνεπώς $a_k x^k \to 0$. Άρα θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_k x^k| < 1$ $\forall k \geq n_0$.

Έστω τώρα $y \in \mathbb{R}$ με $|y|<|x|$. Για $k \geq n_0$: $|a_k y^k| = |a_k x^k| \left|\left(\frac{y}{x}\right)^k\right| < \left|\frac{y}{x}\right|^k$

Εφόσον $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{y}{x}\right|^k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} \left|\frac{y}{x}\right|^k$ συγκλίνει, άρα από κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k y^k|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k y^k|$ συγκλίνει. Δηλαδή, η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο y.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η δυναμοσειρά αποκλίνει στο y και $|x|>|y|$. Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x, τότε από το α) θα συγκλίνει στο y. Άτοπο! Άρα, η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, το σύνολο των σημείων x, για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά, έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

$\to \{0\}$ $\to (-a,a)$ ή $[-a,a]$ ή $(-a,a]$ ή $[-a,a)$

$\to \mathbb{R}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Ορισμός: Ορίζουμε $R = \sup\{|x| \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\}$. (Το σύνολο είναι μη κενό, διότι περιέχει το 0.) Το R καλείται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. $0 \leq R \leq +\infty$

$\forall x \in (-R,R)$, η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο x.

Αν $|x|>R$, η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

(Τα άκρα του διαστήματος -αν υπάρχουν- πρέπει να ελέγχονται ξεχωριστά.)

Στην περίπτωση που $R=0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο 0.

Στην περίπτωση που $R=+\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές (a_k). Αν υπάρχει το όριο $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$ και θέσουμε $R = \frac{1}{a}$ (με τη σύμβαση πως $\frac{1}{0}=+\infty$ ή $\frac{1}{+\infty}=0$)

α) Αν $x \in (-R, R)$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο x

β) Αν $|x|>R$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

[Δηλαδή το R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.]

<u>Απόδειξη:</u>

Εξετάζουμε την περίπτωση $0<a<+\infty$

α) Αν $x \in (-R,R)$, τότε $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| = a \cdot |x| = \frac{|x|}{R} < 1$

Άρα, από το κριτήριο ρίζας του Cauchy, η $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ συγκλίνει. Δηλαδή, η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο x

β) Αν $|x|>R$, τότε $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| = a \cdot |x| = \frac{|x|}{R} > 1$

Άρα, από το κριτήριο ρίζας του Cauchy, η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

<u>Παρατήρηση:</u> Το Θεώρημα δεν δίνει συμπεράσματα για τα άκρα $\pm R$ του διαστήματος. Μπορεί να συγκλίνει
- σε κανένα
- σε ένα
- και στα δύο

<u>Παραδείγματα:</u>

α) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (Δηλαδή $a_k = 1 \ \forall k$.) $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ άρα $R=1$.

Για $x=1$ έχουμε τη σειρά $\sum 1^k \to$ αποκλίνει

Για $x=-1$ έχουμε τη σειρά $\sum (-1)^k \to$ αποκλίνει

β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$ άρα $R=1$

Για $x=1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow$ αποκλίνει

Για $x=-1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \longrightarrow$ συγκλίνει

γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$, $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} = 1$ άρα $R=1$

Για $x=1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \longrightarrow$ συγκλίνει

Για $x=-1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \longrightarrow$ συγκλίνει

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με μη μηδενικούς συντελεστές (a_k). Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = a$ $(0 \le a \le +\infty)$ Θέτουμε $R = 1/a$ (με τη σύμβαση $\frac{1}{0}=+\infty$ και $\frac{1}{+\infty}=0$). Τότε:

α) Αν $x \in (-R, R)$, η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x.

β) Αν $|x| > R$, η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Απόδειξη:

Εξετάζουμε την περίπτωση $0 < a < +\infty$.

α) Αν $x \in (-R, R)$, δηλαδή $|x| < R$, τότε $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x| = a|x| =$
$= \frac{|x|}{R} < 1$. Άρα, από κριτήριο λόγου του D'Alembert, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απόλυτα.

β) Αν $|x| < R$, τότε $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \ldots = a|x| = \frac{|x|}{R} > 1$. Άρα, από κριτήριο λόγου του D'Alembert, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει.

ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΣΕΙΡΩΝ:

Αναδιάταξη των φυσικών είναι μια συνάρτηση $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, "1-1" και "επί".
(Η τ "αλλάζει" τη σειρά των φυσικών αριθμών.) Εφόσον η έννοια της σύγκλισης λαμβάνει κατά ουσιαστικό τρόπο τη διάταξη των φυσικών, τίθεται το ερώτημα:
Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η τ αναδιάταξη των φυσικών, συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$;

Θεώρημα: (Riemann)
Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα, τότε $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists \tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ "1-1" και "επί" ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = x$.

[Παραλείπουμε τις αποδείξεις.]

Ασκήσεις:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = ;$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Συνεπώς, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{6^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{6^k} = 1/2 + 1 = 3/2$$

Υπενθύμιση: $\lim b_k = b$
$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2k+1} \right]$ είναι της μορφής
$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ όπου $b_k = \frac{1}{2} \frac{1}{2k-1}$ και $\lim b_k = 0$.

Άρα, $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - 0 = 1/2$.

Επομένως, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = 1/2$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ για ποιό x συγκλίνει; ④

$a_k = \frac{x^k}{k!}$

<u>Κριτήριο λόγου:</u> $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$

Άρα, η σειρά συγκλίνει για κάθε x.

<u>Κριτήριο ρίζας:</u> $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k!}} \to 0$

(διότι όπως δείξαμε στον Απειροστικό Λογισμό I $\sqrt[k]{k!} \to +\infty$)

Άρα, $\forall x \in \mathbb{R}$ η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ συγκλίνει.